



TUGAS AKHIR - SM141501

**PERSAMAAN DIFERENSIAL  
FRAKSIONAL TIPE CAPUTO SERTA  
APLIKASINYA PADA PROSES  
PENDINGINAN SEMI-INFINITE OLEH  
RADIASI**

DWI AFIFAH RAHMATUL HIJRAH  
NRP 1211 100 068

Dosen Pembimbing  
Dra. Sri Suprpti H., M.Si

JURUSAN MATEMATIKA  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2016



FINAL PROJECT - SM141501

**CAPUTO FRACTIONAL DIFFERENTIAL  
EQUATION AND APPLICATION  
PROCESS OF SEMI-INFINITE COOLING  
BY RADIATION**

DWI AFIFAH RAHMATUL HIJRAH  
NRP 1211 100 068

Supervisor  
Dra. Sri Suprpti H., M.Si

MATHEMATICS DEPARTMENT  
Faculty of Mathematics and Science  
Sepuluh Nopember Institute of Technology  
Surabaya 2016

## LEMBAR PENGESAHAN

**PERSAMAAN DIFFERENSIAL FRAKSIONAL TIPE CAPUTO  
SERTA APLIKASINYA PADA PROSES PENDINGINAN  
SEMI-INFINITE OLEH RADIASI**

***CAPUTO FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND  
APPLICATIONS PROCESS OF SEMI-INFINITE COOLING  
BY RADIATION***

### TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat  
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains  
Pada bidang studi Pemodelan dan Simulasi Sistem  
Program Studi S-1 Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh :

**DWI AFIFAH RAHMATUL ILJRAH**

NRP. 1211100068

Menyetujui,

Pembimbing I

Dra. Sri Suprpti H., M.Si

NIP. 19540222 198403 2 001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika FMIPA ITS

Dr. Imami Mukhlas, S.Si, MT

NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Januari 2016



# **PERSAMAAN DIFERENSIAL FRAKSIONAL TIPE CAPUTO SERTA APLIKASINYA PADA PROSES PENDINGINAN SEMI-INFINITE OLEH RADIASI**

**Nama Mahasiswa** : Dwi Afifah rahmatul hijrah  
**NRP** : 1211 100 068  
**Jurusan** : Matematika  
**Dosen Pembimbing** : Dra. Sri Suprapti H., M.Si

## **Abstrak**

*Persamaan diferensial fraksional telah menjadi alat yang penting didalam permodelan matematika. Namun, penelitian tentang teori dasar dari persamaan diferensial fraksional belum banyak dilakukan. Kajian dasar teori persamaan diferensial fraksional dilakukan dengan membuktikan keseimbangan persamaan antara integral volterra dengan persamaan diferensial fraksional serta membuktikan sifat-sifat dari persamaan diferensial tersebut. Dengan menggunakan persamaan integral volterra dan masalah nilai batas didapat hasil dari persamaan diferensial fraksional linier tipe Caputo pada order  $0 < q < 1$ . Sedangkan untuk persamaan diferensial fraksional nonlinier digunakan fraksional deret Taylor untuk mendapatkan hasil numerik. Pada Tugas Akhir ini hasil numerik dari fraksional deret Taylor digunakan untuk menyelesaikan model untuk proses pendinginan semi-infinite oleh radiasi.*

**Kata kunci:** *Fraksional Deret Taylor, Integral Volterra, Masalah Nilai Batas, Persamaan Diferensial Fraksional, Pendinginan Semi-Infinite*





# **CAPUTO FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION AND APPLICATION PROCESS OF SEMI-INFINITE COOLING BY RADIATION**

**Nama Mahasiswa** : Dwi Afifah rahmatul hijrah  
**NRP** : 1211 100 068  
**Jurusan** : Matematika  
**Dosen Pembimbing** : Dra. Sri Suprapti H., M.Si

## **Abstract**

*Fractional differential equations have become an important tool in mathematics modelling. However, there are have still not much study about basic theory of fractional different equations. Study about basic theory of fractional differential equations has been doing with born out the balance of the equations between volterra integral and fractional differential equations and born out the properties from the differential equations. Within volterra integral and boundary initial problem will gain the result of Caputo linear fractional differential equations order  $0 < q < 1$ . Whereas for nonlinear used fractional Taylor series to get numeric result. In this final project the numeric result from fractional Taylor series has been using to solved the process of semi-infinite cooling by radiation.*

**Keyword:** *Boundary Value Problem, Differential Fractional Equations, Fractional Taylor Series, Intergal Volterra, Semi-Infinite Cooling*



## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul **“PERSAMAAN DIFERENSIAL FRAKSIONAL TIPE CAPUTO SERTA APLIKASINYA PADA PROSES PENDINGINAN SEMI-INFINITE OLEH RADIASI”** sebagai syarat kelulusan dalam menempuh program S-1 Jurusan Matematika FMIPA ITS Surabaya.

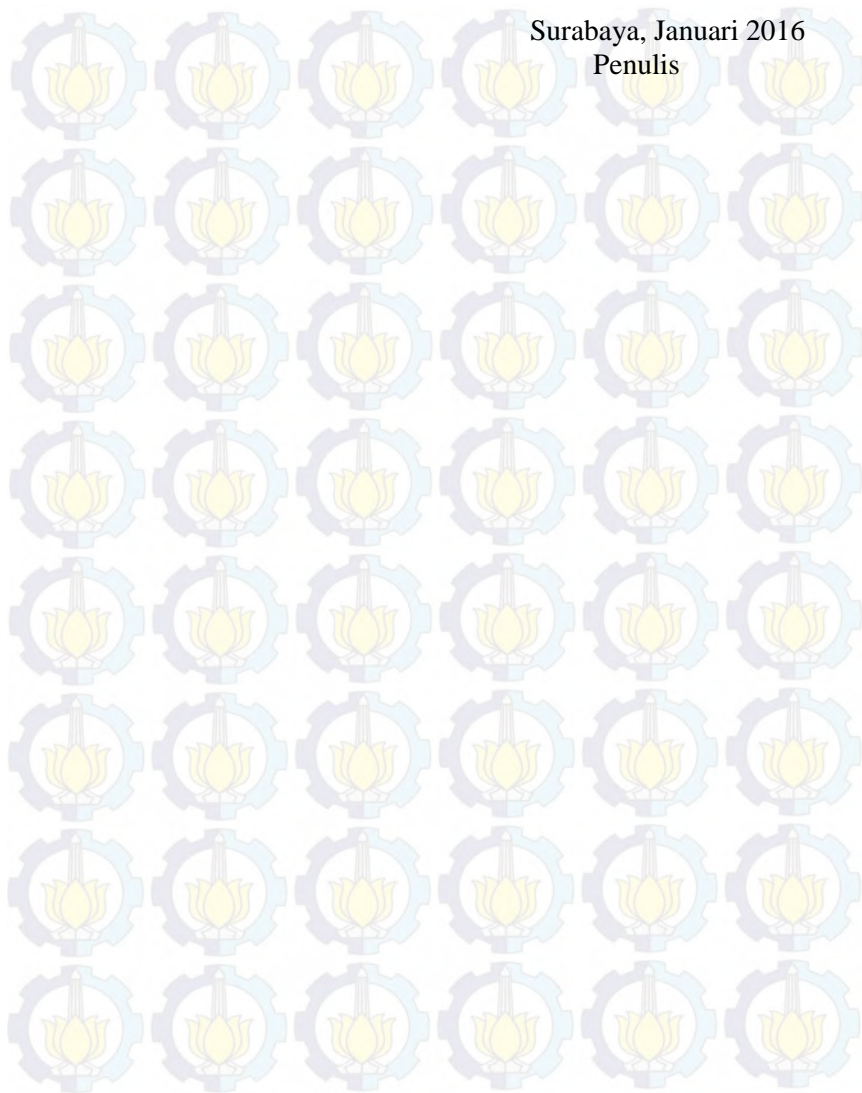
Tugas akhir ini dapat terselesaikan dengan baik dan lancar atas kerja sama dan dukungan berbagai pihak. Sehubungan dengan itu, penulis bermaksud menyampaikan terima kasih kepada :

1. Bapak Dr. Imam Mukhlas, S.Si, MT selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA ITS.
2. Ibu Dra. Sri Suprpti H., M.Si sebagai dosen pembimbing Tugas Akhir, atas segala bimbingan dan motivasi yang telah diberikan kepada penulis.
3. Bapak Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si, Bapak Drs. Kamiran, M.Si, Ibu Sunarsini, M.Si, dan Ibu Dra. Wahyu Fistia doctorina, M.Si selaku dosen penguji.
4. Bapak Drs. Chairul Imron, MI.Komp selaku Ketua Prodi S-1 Jurusan Matematika FMIPA ITS.
5. Bapak Drs. Lukman Hanafi, M.Sc, selaku dosen wali.
6. Bapak dan Ibu dosen serta seluruh *staff* Tata Usaha dan Laboratorium Jurusan Matematika FMIPA ITS.
7. Teman – teman angkatan 2011 Jurusan Matematika atas dukungan yang telah diberikan kepada penulis

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis memohon saran dan kritik dari berbagai pihak sebagai bahan perbaikan di masa yang akan datang. Semoga laporan ini bermanfaat bagi semua pihak.



Surabaya, Januari 2016  
Penulis



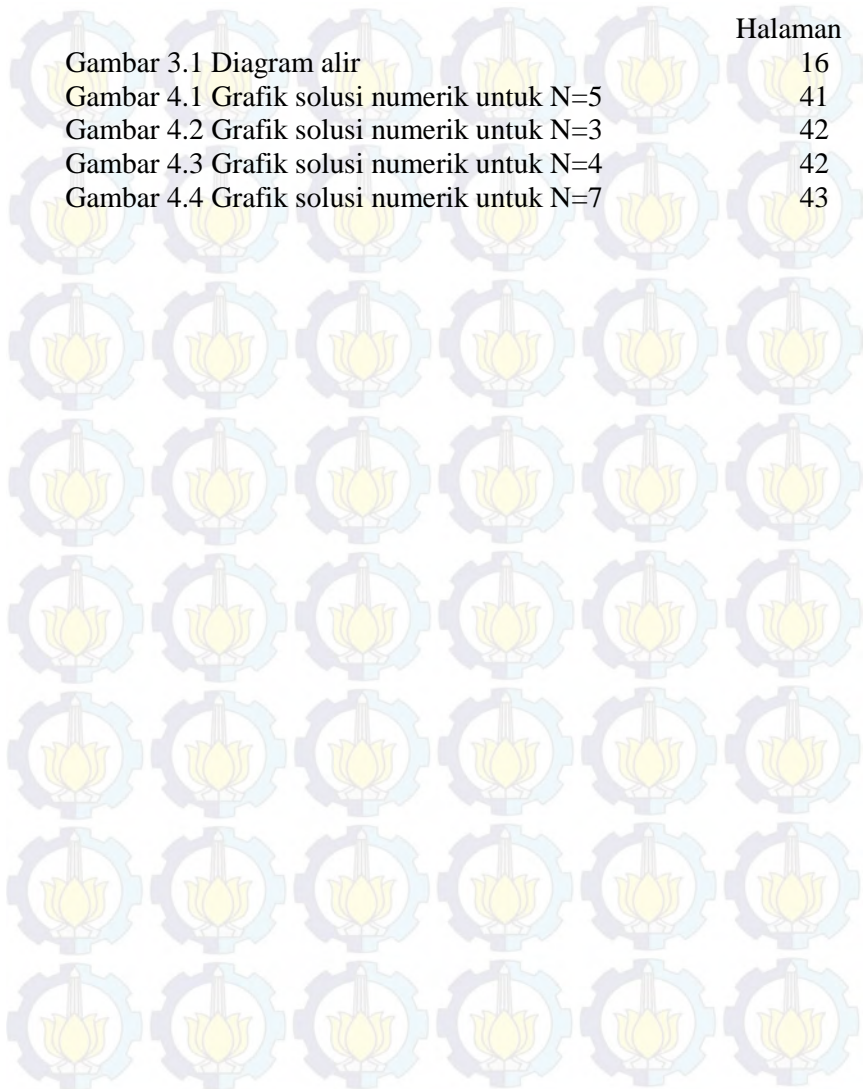
## DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
<i>ABSTRACT</i>	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR SIMBOL	xix
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah.....	2
1.4 Tujuan.....	2
1.5 Manfaat.....	3
1.6 Sistematika Penulisan.....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Fungsi Gamma.....	5
2.2 Integral Fraksional dan Turunan Fraksional.....	7
2.3 Integral Volterra.....	10
2.4 Masalah nilai Batas.....	10
2.5 Pendinginan Semi Infinite.....	11
2.6 Fraksional Deret Taylor.....	12
2.7 Transformasi Laplace.....	13
BAB III METODOLOGI PENELITIAN	
3.1 Studi Literatur.....	17
3.2 Tahap Mengkaji Persamaan Diferensial Fraksional.....	17
3.3 Tahap Perhitungan Numerik Model Pada Proses Pendinginan Semi-Infinite Oleh Radiasi.....	17
3.4 Tahap Simulasi Numerik Model Pada Proses Pendinginan Semi-Infinite Oleh Radiasi.....	17
3.5 Kesimpulan dan Saran.....	18

3.6 Diagram Alir .....	18
<b>BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN</b>	
4.1 Sifat-sifat Utama pada Integral dan Turunan Fraksional Riemann-Louville .....	19
4.2 Keseimbangan Persamaan Differensial Fraksional dengan Persamaan Integral Volterra .....	23
4.3 Beberapa Contoh Penyelesaian Eksak Persamaan Diferensial Fraksional Linier .....	25
4.4 Penyelesaian Numerik Dari Proses Pendinginan Semi-Infinite Oleh Radiasi .....	33
<b>BAB V KESIMPULAN DAN SARAN</b>	
5.1 Kesimpulan .....	47
5.2 Saran .....	48
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	49
<b>LAMPIRAN</b>	
Listing program.....	51

## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 3.1 Diagram alir	16
Gambar 4.1 Grafik solusi numerik untuk $N=5$	41
Gambar 4.2 Grafik solusi numerik untuk $N=3$	42
Gambar 4.3 Grafik solusi numerik untuk $N=4$	42
Gambar 4.4 Grafik solusi numerik untuk $N=7$	43

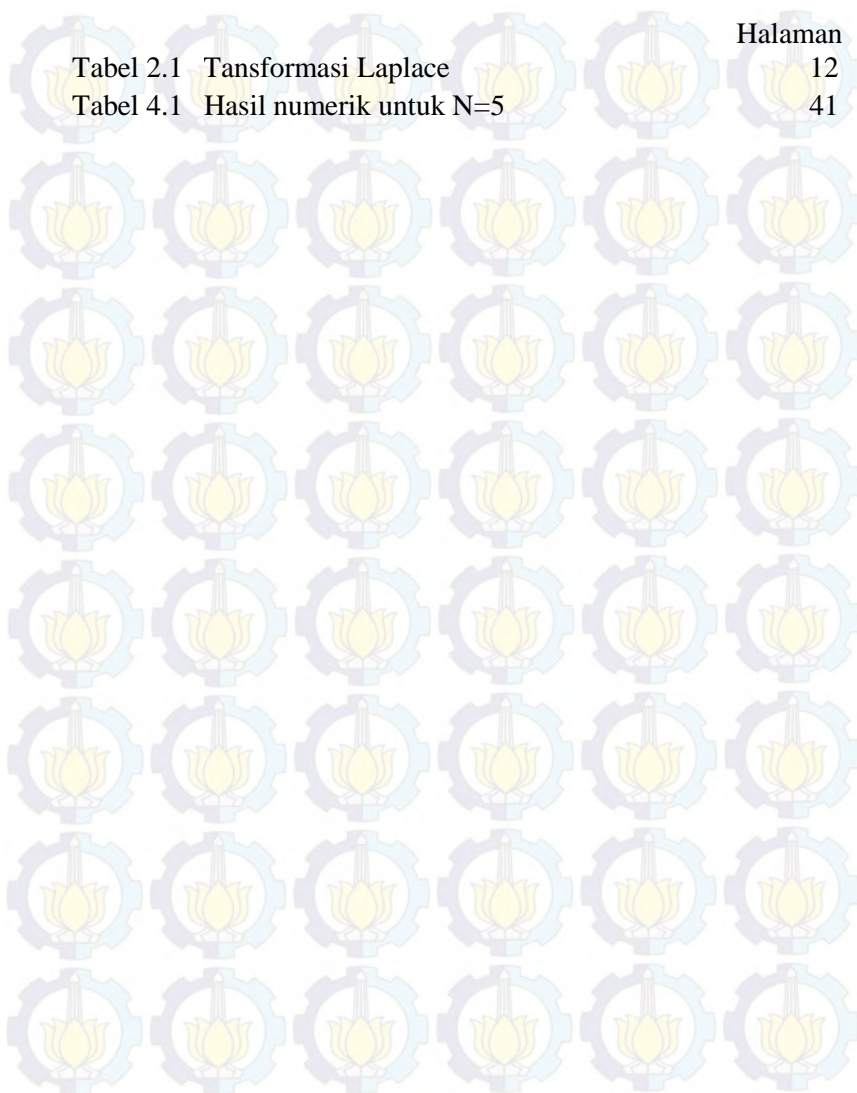


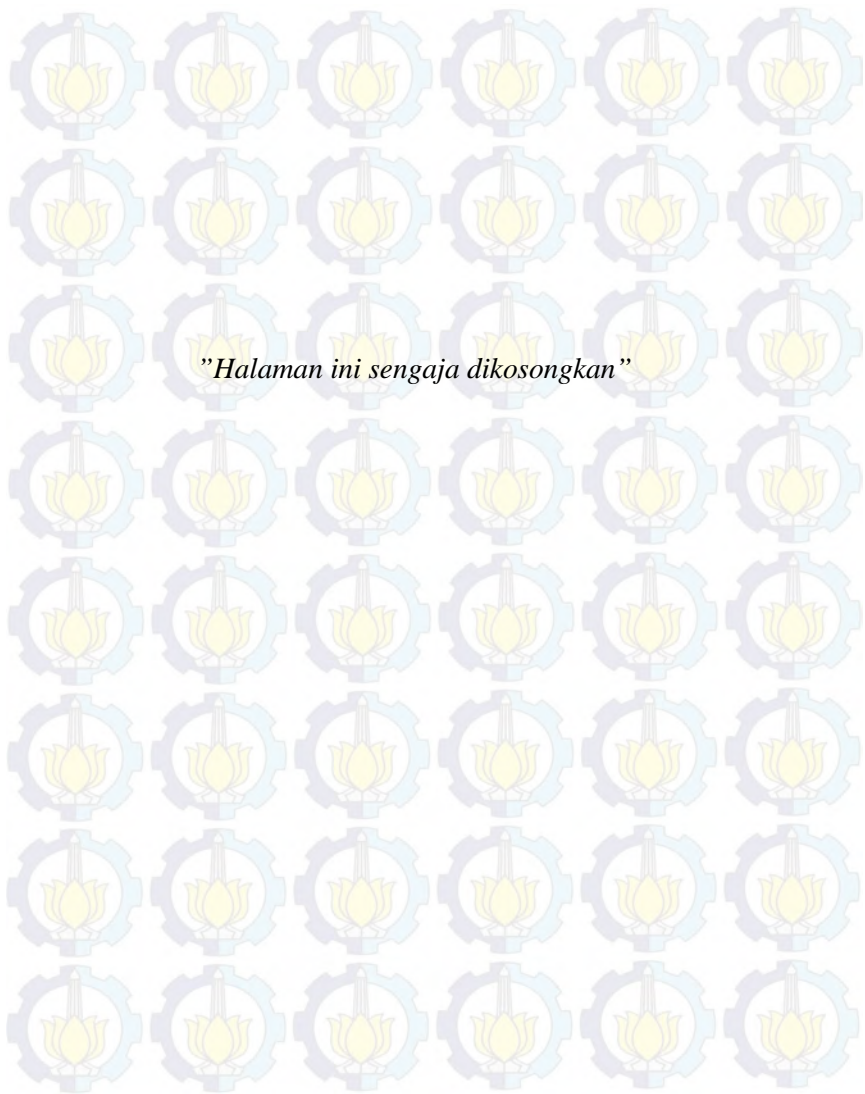




## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Tansformasi Laplace	Halaman
Tabel 4.1	Hasil numerik untuk N=5	12
		41





## DAFTAR SIMBOL

$q$	=	order integral dan diferensial fraksional
$\Gamma$	=	fungsi Gamma
$I^q$	=	fungsi integral fraksional
$s$	=	variabel bebas
$t$	=	variabel waktu
$D^q$	=	fungsi turunan fraksional
$n$	=	bilangan bulat positif terkecil yang mendekati $q$
$v$	=	derajat fungsi polinomial yang merupakan bilangan real
$c$	=	konstanta turunan fraksional
$\lambda$	=	koefisien panas
$T(t)$	=	fungsi $t$
$u(t, 0)$	=	suhu permukaan
$u_0$	=	nilai awal
$\Re(z)$	=	bagian real dari $z$
$C[0, \infty)$	=	fungsi yang kontinu pada selang $[0, \infty)$
$u(0, t)$	=	suhu permukaan
$C([0, T], R)$	=	fungsi yang kontinu pada selang $[0, T]$ pada bilangan real
	=	persamaan yang terbukti





## **BAB I**

### **PENDAHULUAN**

Pada bab ini dijelaskan hal-hal yang melatarbelakangi munculnya permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini. Kemudian permasalahan tersebut disusun kedalam suatu rumusan masalah. Selanjutnya dijabarkan juga batasan masalah untuk mendapatkan tujuan yang diinginkan serta manfaat yang dapat diperoleh. Adapun sistematika penulisan Tugas Akhir diuraikan pada bagian akhir bab ini.

#### **1.1 Latar Belakang**

Kalkulus fraksional adalah cabang dari kajian tentang turunan dan integral order bukan bilangan bulat (dinamakan integral dan turunan fraksional). Secara khusus, mata pelajaran ini melibatkan gagasan dan metode penyelesaian persamaan diferensial yang melibatkan turunan fraksional dari fungsi yang tidak diketahui yang dinamakan persamaan diferensial fraksional[5].

Kalkulus fraksional muncul hampir bersamaan dengan kalkulus klasik ditetapkan. Kalkulus fraksional pertama kali diperkenalkan dalam tulisan Leibniz pada l'Hospital tahun 1695, ketika ide untuk semi-turunan disarankan. Setelah itu, banyak ahli matematika yang membangun dasar kalkulus fraksional seperti Liouville, Riemann, Hadamard, Erdelyi-Kober, Griinwald-Letnikov, dan Caputo [3]. Namun, definisi yang paling sering digunakan adalah definisi dari Riemann-Louville dan Caputo.

Konsep dasar dan teori kalkulus fraksional telah didefinisikan dengan sangat baik, namun terdapat beberapa kesulitan untuk mengaplikasikannya dalam masalah nyata[7]. Untuk mengatasi kesulitan ini didefinisikan turunan tipe Caputo. Konsep ini memiliki kemiripan dengan turunan Riemann-Louville.

Persamaan diferensial fraksional order  $0 < q < 1$  tipe Caputo banyak digunakan untuk memodelkan masalah pada fisika dan biologi[3]. Beberapa teknik untuk mendapatkan solusi dari persamaan diferensial fraksional telah dikaji sebelumnya. Pada hampir semua teknik tersebut, solusi yang diberikan merupakan solusi dari integral volterra dengan pengembangan kondisi awal.

Pada Tugas Akhir ini digunakan persamaan integral volterra yang diberikan pada persamaan integral fraksional yang didefinisikan Caputo pada order  $0 < q < 1$  dengan kondisi awal  $x(0) = x_0$  dan menghasilkan solusi eksak pada persamaan diferensial fraksional linier. Sedangkan persamaan nonlinier menggunakan fraksional deret Taylor untuk menemukan solusi numerik. Untuk Tugas Akhir ini, hasil numerik dari fraksional deret Taylor digunakan untuk menyelesaikan model untuk proses pendinginan semi-infinite oleh radiasi.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berkaitan dengan latar belakang yang ada, permasalahan yang dibahas pada Tugas Akhir ini antara lain :

1. Bagaimanakah kajian dasar teori dari persamaan diferensial fraksional?
2. Bagaimanakah teknik untuk menemukan solusi numerik pada persamaan diferensial fraksional tipe Caputo pada masalah proses pendinginan semi-infinite oleh radiasi?

## 1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas pada Tugas Akhir ini akan dibatasi pada:

1. Persamaan diferensial fraksional yang digunakan adalah tipe Caputo
2. Order yang digunakan adalah  $0 < q < 1$
3. Integral Volterra yang digunakan jenis kedua



4. Ditetapkan kondisi awal  $x(0) = x_0$
5. Untuk persamaan diferensial fraksional nonlinier menggunakan hasil fraksional deret Taylor.

#### **1.4 Tujuan**

Tujuan yang ingin dicapai dalam Tugas Akhir ini adalah :

1. Mengkaji dasar teori persamaan diferensial fraksional
2. Menyelidiki teknik untuk menemukan solusi numerik pada persamaan diferensial fraksional tipe Caputo pada masalah pada proses pendinginan semi-infinite oleh radiasi.

#### **1.5 Manfaat**

Manfaat yang diharapkan dalam Tugas Akhir ini adalah :

1. Menambah pemahaman tentang persamaan diferensial fraksional
2. Memberikan referensi untuk mendapatkan solusi numerik dari persamaan diferensial fraksional tipe Caputo untuk menyelesaikan masalah pada proses pendinginan semi-infinite oleh radiasi.

#### **1.6 Sistematika Penulisan**

Tugas Akhir ini secara keseluruhan terdiri dari lima bab dan lampiran. Secara garis besar masing-masing bab akan membahas hal-hal sebagai berikut :

#### **BAB I PENDAHULUAN**

Bab ini berisi latar belakang permasalahan, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penulisan serta sistematika penulisan.

#### **BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

Bab ini memaparkan dasar teori yang digunakan penulis dalam mengerjakan tugas akhir.

#### **BAB III METODE PENELITIAN**



Bab ini menjelaskan alur kerja dan metode yang digunakan penulis dalam mengerjakan tugas akhir.

#### **BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN**

Bab ini menyajikan analisis mengenai beberapa sifat utama pada integral dan turunan fraksional Riemann-Louville, keseimbangan persamaan differensial fraksional dengan persamaan integral volterra, contoh penyelesaian eksak dari persamaan diferensial fraksional linier, penyelesaian numerik dari proses pendinginan semi-infinite beserta simulasi numeriknya.

#### **BAB V PENUTUP**

Bab ini berisi kesimpulan dan saran dari penulis mengenai persamaan diferensial fraksional tipe Caputo beserta aplikasinya pada proses pendinginan tubuh semi-infinite oleh radiasi.

#### **LAMPIRAN**

## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai tinjauan pustaka yang menjadi dasar materi dalam penyusunan tugas akhir serta menunjang metode – metode yang digunakan dalam pembahasan tugas akhir ini.

### 2.1 Fungsi Gamma

Di dalam matematika, fungsi Gamma (disajikan oleh huruf kapital Yunani  $\Gamma$ ). Fungsi Gamma didefinisikan untuk semua bilangan kompleks, kecuali untuk bilangan bulat negatif dan nol. Untuk bilangan kompleks dengan bagian real positif, fungsi Gamma terdefinisi melalui integral tak wajar yang konvergen.

#### *Definisi 2.1*

*Fungsi Gamma didefinisikan dengan[3]:*

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt, \quad \Re(n) > 0 \quad (2.1)$$

Fungsi Gamma ini dikenal sebagai Integral Euler jenis kedua. Fungsi reduksi Gamma diberikan dengan:

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= \int_0^{\infty} t^{n+1-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt \end{aligned}$$

Menggunakan integrasi parsial untuk:

$$u = t^n$$

$$du = nt^{n-1} dt$$

$$v = \int e^{-t} dt$$

$$v = -e^{-t}$$

maka persamaan menjadi

$$\Gamma(n+1) = \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} -e^{-t} t^n + e^{-0} 0^n \right] - \int_0^{\infty} -nt^{n-1} e^{-t} dt$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{e^t} t^n + 0 \right] - \int_0^\infty -n t^{n-1} e^{-t} dt \\
\Gamma(n+1) &= 0 + n \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \\
\Gamma(n+1) &= n \Gamma(n)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Misalkan untuk  $n = 1$ , maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt \\
&= \int_0^\infty t^0 e^{-t} dt \\
&= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p e^{-t} dt \\
&= \lim_{p \rightarrow \infty} [-e^{-t}]_0^p \\
&= \lim_{p \rightarrow \infty} [-e^{-p} - (-e^{-0})] \\
&= [0 - (-1)] \\
&= 1
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan fungsi reduksi Gamma, untuk  $n = 1$ , diperoleh:

$$\begin{aligned}
\Gamma(1+1) &= 1\Gamma(1) \\
\Gamma(2) &= 1\Gamma(1)
\end{aligned}$$

Karena  $\Gamma(1) = 1$ , maka:

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1 \\
\Gamma(2) &= (2-1)!
\end{aligned}$$

Untuk  $n = 2$ , diperoleh:

$$\begin{aligned}
\Gamma(2+1) &= 2\Gamma(2) \\
\Gamma(3) &= 2 \times 1\Gamma(1) \\
&= 2 \times 1 \\
\Gamma(3) &= (3-1)!
\end{aligned}$$

Begitu seterusnya, sehingga didapat untuk  $n \in \mathbb{N}$  maka:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{2.3}$$

## 2.2 Integral Fraksional dan Turunan Fraksional

Perumusan untuk turunan dan integral fraksional sebenarnya adalah hasil pengembangan dari integral dan turunan order bilangan bulat. Namun, turunan dan integral fraksional tidak memiliki order bilangan bulat melainkan pecahan. Misalkan  $q$  adalah order dari integral dan turunan fraksional maka selang pada  $q$  adalah  $0 < q < 1$ .

### Definisi 2.2

*Integral fraksional tipe Riemann-Liouville pada order  $q > 0$  dan fungsi  $I^q: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  didefinisikan dengan [1]:*

$$I^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s) ds. \quad (2.4)$$

### Definisi 2.3

*Turunan fraksional tipe Riemann-Liouville pada order  $q > 0$  dan fungsi  $D^q: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  didefinisikan dengan [1]:*

$$D^q f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t (t-s)^{n-q-1} f(s) ds, \quad (2.5)$$

$$n-1 < q \leq n$$

Terlihat bahwa turunan fraksional merupakan pengembangan dari integral fraksional. Akan tetapi, pada turunan fraksional terdapat variabel  $n$  yang merupakan bilangan bulat positif terkecil yang mendekati order dari turunan fraksional tersebut.

Terdapat cara lain untuk menghitung turunan fraksional, yaitu dengan menggunakan turunan fraksional tipe Caputo. Tipe ini diperkenalkan Caputo pada paper yang dibuatnya tahun 1967. Berbeda dengan turunan fraksional Riemann-Liouville, ketika menyelesaikan persamaan diferensial menggunakan tipe Caputo, tidak perlu mendefinisikan kondisi awal order fraksional.



**Definisi 2.4**

Fungsi  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dikatakan sebagai kontinu absolut pada  $[a, b]$  jika untuk setiap  $\epsilon > 0$  terdapat  $\delta > 0$  sehingga

$\{[a_i, b_i]: 1 \leq i \leq N\}$  dengan

$$\sum_{i=1}^N |b_i - a_i| < \delta$$

berakibat

$$\sum_{i=1}^N |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$$

Fungsi tersebut biasa dinamakan dengan  $AC[a, b]$ [11].

**Definisi 2.5**

Turunan fraksional tipe Caputo pada order  $0 < q < 1$  dan fungsi  $f(t) \in AC[a, b]$  didefinisikan dengan[3]:

$$D^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_0^t (t-s)^q f'(s) ds \quad (2.6)$$

**Definisi 2.6**

Turunan fraksional Riemann-Liouville dengan fungsi  $f(t) = (t-a)^v$  untuk  $v$  adalah bilangan real didefinisikan sebagai[8]

$$D^q f(t) = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-q+1)} (t-a)^{v-q} \quad (2.7)$$

**Lemma 2.1[3]**

a. Jika  $q > 0, t > 0$  maka

$$I^q D^q f(t) = f(t) \quad (2.8)$$

b. Jika  $f(t) \in L_1(a, b)$  dan  $I^{n-q} f(t) \in AC^n[a, b]$  maka

$$(I^q D^q f)(t) = f(t) - \sum_{j=1}^n \frac{y^{(n-j)}(a)(t-a)^{q-j}}{\Gamma(q-j+1)}$$

$$y^{(n-j)}(t) = (I^{n-q} f)(t) \quad (2.9)$$

dengan  $L_1[a, b] := \left\{ f: \int_a^b |f| < \infty \right\}$  dan

$$AC^n[a, b] := \left\{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ dan } (D^{n-1}f)(x) \right. \\ \left. \in AC[a, b] \left( D = \frac{d}{dx} \right) \right\}$$

Beberapa sifat utama pada integral dan turunan fraksional Riemann-Louville adalah[3]:

1. Jika  $f \in C[0, \infty)$ , integral order fraksional Riemann-Louville memiliki sifat penting:

$$I^q (I^r f(t)) = I^{q+r} f(t)$$

dengan  $q > 0$  dan  $r > 0$ .

2. Untuk  $q > 0, t > 0$ ,

$$D^q (I^q f(t)) = f(t)$$

3. Jika turunan fraksional sebuah fungsi yang memiliki order  $q$  dapat diintegrasikan maka

$$I^q (D^q f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^n [D^{q-j} f(t)] \frac{t^{q-j}}{\Gamma(q-j+1)}$$

$$n - 1 < q \leq n$$

dan jika  $m < 0, D^m f(t)$  didefinisikan sebagai

$$D^m f(t) = I^{-m} f(t)$$

4. Turunan fraksional Riemann-Liouville dengan konstanta  $c$  diberikan oleh

$$D^q (c) = \frac{ct^{-q}}{\Gamma(1-q)}$$

Salah satu keuntungan penting dalam menggunakan turunan fraksional tipe Caputo adalah turunan Caputo dengan konstanta adalah nol atau  $D^q (c) = 0$ .

### 2.3 Integral Volterra

Terdapat beberapa persamaan integral volterra yang diketahui[4]. Namun, pada Tugas Akhir ini persamaan yang digunakan hanyalah persamaan integral volterra jenis kedua.

#### **Definisi 2.7**

*Persamaan linier intergal volterra jenis kedua didefinisikan dengan[4]:*

$$u(t) = g(t) + \int_0^t K(t,s)u(s)ds \quad t \in I \quad (2.10)$$

dengan  $K(t,s)$ : kernel fungsi integral Volterra

$g(t)$ : fungsi yang diberikan, dan

$$I = \{t: t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq T\}, T > 0, T \in \mathbb{R}$$

### 2.4 Masalah Nilai Batas

Misalkan terdapat persamaan diferensial fraksional

$$D^q x(t) = f(t, x(t)) \quad (2.11)$$

$$x(0) = x_0 \quad (2.12)$$

Dengan fungsi  $f(t, x(t))$  merupakan fungsi-fungsi yang kontinu di dalam suatu selang  $a \leq t \leq b$ . Persamaan diferensial bersama-sama dengan syarat awal, disebut suatu *masalah nilai awal (MNA)*. Jika mencari suatu penyelesaian  $x(t)$  dari persamaan diferensial yang memenuhi syarat pada titik akhir dari selang  $a \leq t \leq b$ , maka diberikan suatu syarat tambahan, misalkan:

$$x(a) = A \text{ dan } x(b) = B \quad (2.13)$$

$A$  dan  $B$  adalah dua buah konstanta. Syarat (2.13) yang diberikan pada titik akhir (atau titik batas) dari selang  $a \leq t \leq b$  disebut *syarat batas*. Persamaan diferensial bersama-sama dengan syarat batas, disebut suatu *masalah nilai batas (MNB)*. Suatu

MNB dapat mempunyai tepat satu penyelesaian, takberhingga penyelesaian, atau tak mempunyai penyelesaian[6].

## 2.5 Pendinginan Semi-Infinite

Masalah nilai batas pada proses pendinginan semi infinite oleh radiasi didefinisikan dengan[8]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty. \quad (2.14)$$

Menggunakan pemisahan variabel, didapat:

$$u(x, t) = X(x).T(t)$$

Subjek untuk kondisi awal

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) = \lambda u^4(t), \quad u(t, \infty) = u(0, x) = u_0. \quad (2.15)$$

$\frac{\partial u}{\partial t}(t, 0)$  merupakan representasi dari turunan fraksional  $u(x, t)$  yang didefinisikan dengan:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, 0) = D^{\frac{1}{2}}(u_0 - u(t, 0)). \quad (2.16)$$

Sesuai dengan masalah nilai batas satu-dimensi untuk fungsi diferensial fraksional non-linear diperoleh:

$$D^{\frac{1}{2}}T(t) - \lambda(u_0 - T(t))^4 = 0, \quad t > 0, \\ T(0) = 0 \quad (2.17)$$

Dengan  $T(t) = u_0 - u(0, t)$

## 2.6 Fraksional Deret Taylor

Andaikan  $f$  dan semua turunannya,  $f', f'', f''', \dots$ , berada di dalam selang  $[a, b]$ . Misalkan  $x_0 \in [a, b]$ , maka untuk nilai-nilai  $x$  di sekitar  $x_0$  dan  $x \in [a, b]$ ,  $f(x)$  dapat diperluas (diekspansi) ke dalam deret Taylor[12]:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + \dots \quad (2.18)$$

Jika dimisalkan  $x - x_0 = t$ , maka  $f(x)$  dapat juga ditulis sebagai:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{t}{1!} f'(x_0) + \frac{(t)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(t)^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + \dots \quad (2.19)$$

Kasus khusus adalah bila fungsi diperluas di sekitar  $x_0 = 0$ , maka deret pada persamaan (2.19) dinamakan **deret Maclaurin**, yang merupakan deret Taylor baku. Kasus  $x_0 = 0$  paling sering muncul dalam praktek.

### Definisi 2.8

*Perluasan deret Taylor didefinisikan dengan[12]:*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (t-a)^n \quad (2.20)$$

Untuk mendapatkan fraksional deret Taylor maka  $f^{(n)}(a)$  disubstitusi dengan  $D^{iq} f(a)$  dan  $n!$  disubstitusi dengan fungsi gamma  $\Gamma(iq + 1)$  serta  $t^n$  disubstitusi dengan  $t^{iq}$ , maka didapat fraksional deret Taylor yaitu:

$$f(t) = \sum_{i=0}^n \frac{(t-a)^{iq}}{\Gamma(iq+1)} (D^{iq} f)(a) \quad (2.21)$$



## 2.7 Transformasi Laplace

Transformasi Laplace adalah suatu metode operasional yang dapat digunakan secara mudah untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier. Dengan menggunakan transformasi Laplace, dapat dirubah beberapa fungsi umum seperti fungsi sinusoida dan fungsi eksponensial menjadi fungsi-fungsi aljabar kompleks.

### Definisi 2.9

*Transformasi Laplace dari  $f(t)$  didefinisikan oleh [11]:*

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (2.22)$$

Adapun beberapa fungsi transformasi laplace yang sering digunakan tertera pada tabel dibawah:

**Tabel 2.1** Transformasi Laplace

N0	$f(t)$	$F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	$t$	$\frac{1}{s^2}$
3	$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
6	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
7	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
8	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$

9	$\frac{1}{b-a}(be^{-at} - ae^{-bt})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
10	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
11	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
12	$\frac{1}{a^2}[at - 1 + e^{-at}]$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$

**Teorema 2.1** (Teorema konvolusi)

Jika  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ,  $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ , maka

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\} = F(s)G(s) \quad (2.23)$$

*Bukti*

Diketahui  $F(s) = \int_0^\infty e^{-su} f(u)du$ ,

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-sv} g(v)dv$$

maka perkalian keduanya menghasilkan

$$F(s)G(s) = \left[ \int_0^\infty e^{-su} f(u)du \right] \left[ \int_0^\infty e^{-sv} g(v)dv \right]$$

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u)g(v)dudv$$

Menggunakan integral substitusi, misalkan

$$t = u + v$$

$$dt = dv$$

Persamaan baru diperoleh

$$F(s)G(s) = \int_{t=0}^\infty \int_{u=0}^t e^{-st} f(u)g(t-u)dudt$$

$$F(s)G(s) = \int_{t=0}^\infty e^{-st} \left[ \int_{u=0}^t f(u)g(t-u)du \right] dt$$

$$F(s)G(s) = \mathcal{L}\left[\int_{u=0}^t f(u)g(t-u)du\right]$$

•

Integral tersebut dinamakan sebagai konvolusi dari  $f$  dan  $g$ , dan ditulis

$$f * g = \int_0^t f(u)g(t-u)du \quad (2.24)$$

Dengan cara yang sama seperti pada Teorema 2.1, jika  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ,  $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$ , maka

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du \quad (2.25)$$

*“halaman ini sengaja dikosongkan”*

## **BAB III**

### **METODOLOGI PENELITIAN**

Pada bab ini dijelaskan bagaimana langkah-langkah yang dilakukan dalam melakukan analisis persamaan diferensial fraksional tipe Caputo dan aplikasi pada proses pendinginan semi-infinite oleh radiasi.

#### **3.1 Studi Literatur**

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dan pemahaman teori dengan mencari referensi yang menunjang penelitian. Referensi yang dipakai adalah tugas akhir, jurnal, buku maupun artikel dari internet

#### **3.2 Tahap Mengkaji Persamaan Diferensial Fraksional**

Pada tahap ini dilakukan kajian dasar teori dari persamaan diferensial fraksional dengan membuktikan keseimbangan persamaan dengan integral volterra dengan persamaan diferensial fraksional serta membuktikan sifat-sifat dari persamaan diferensial tersebut.

#### **3.3 Tahap Perhitungan Numerik Model Pada Proses Pendinginan Semi-Infinite Oleh Radiasi**

Pada tahap ini akan diselesaikan perhitungan numerik model pada pendinginan semi-infinite oleh radiasi dengan menggunakan fraksional deret Taylor.

#### **3.4 Tahap Simulasi Numerik Model Pada Proses Pendinginan Semi-Infinite Oleh Radiasi**

Tahap simulasi numerik dilakukan menggunakan software pemrograman MATLAB untuk menggambarkan grafik dan penyelesaian numerik model pada Proses pendinginan semi-infinite oleh radiasi.

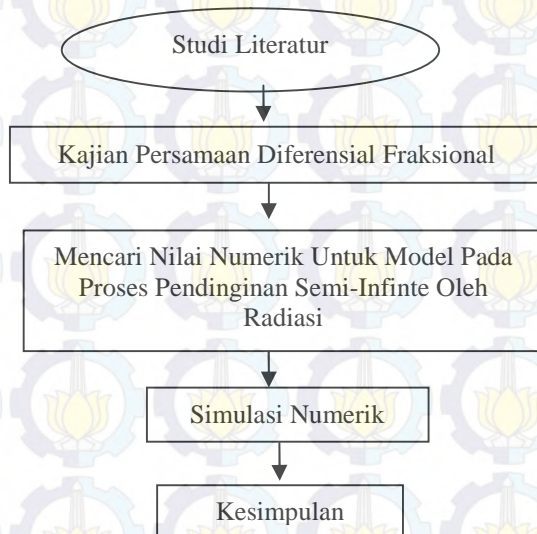


### 3.5 Kesimpulan dan Saran

Setelah dilakukan analisis dan pembahasan maka dapat ditarik suatu kesimpulan dan saran sebagai masukan untuk pengembangan penelitian lebih lanjut.

### 3.6 Diagram Alir

Diagram alir dimaksudkan untuk memudahkan dalam pengerjaan Tugas Akhir agar lebih sistematis. Diagram alir yang digunakan pada penelitian ini disajikan pada gambar berikut :



**Gambar 3.1.** Diagram Alir Penelitian

## BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai beberapa sifat utama pada integral dan turunan fraksional Riemann-Louville, keseimbangan persamaan differensial fraksional dengan persamaan integral volterra, beberapa contoh penyelesaian eksak persamaan diferensial fraksional linier serta penyelesaian numerik dari proses pendinginan semi-infinite.

### 4.1 Sifat-sifat Utama pada Integral dan Turunan Fraksional Riemann-Louville

Pada dasarnya, konsep integral dan turunan adalah dapat mengintegalkan atau menurunkan suatu fungsi sebanyak satu, dua, tiga kali bahkan sampai  $n$  kali. Dimana  $n$  adalah order bilangan bulat. Namun, pada integral dan turunan fraksional, hal tersebut tidak dapat dilakukan mengingat order yang digunakan bukan order bilangan bulat. Oleh karena itu, terdapat beberapa sifat penting dari integral dan turunan fraksional yang dapat digunakan untuk membantu dalam mendapatkan solusi dari turunan dan untegral tersebut. Mengingat terdapat beberapa macam definisi integral dan turunan fraksional, dan yang sering digunakan adalah adalah integral dan turunan Rimann-liouville, maka sifat yang digunakan pun adalah sifat dari tipe tersebut. Sifat-sifat ini nantinya dapat diaplikasikan pula untuk tipe Caputo.

Integral dan turunan fraksional Riemann-Louville memiliki beberapa sifat utama, sebagai berikut:

#### *Sifat 1*

Jika  $f \in C[0, \infty)$ , maka integral Riemann-Louville dapat didefinisikan sebagai:

$$I^q(I^r f(t)) = I^{q+r} f(t) \quad (4.1)$$
$$q > 0 \text{ dan } r > 0.$$

*Bukti.*

Dengan menggunakan definisi dari integral Riemann-Liouville diperoleh

$$\begin{aligned}
 I^q(I^r f(t)) &= I^q \left( \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} f(s) ds. \right) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \\
 &\quad \left( \left( \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} f(s) ds. \right) ds \right) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(q)} \frac{1}{\Gamma(r)} \\
 &\quad \int_0^t (t-s)^{q-1} \left( \int_0^t (t-s)^{r-1} f(s) ds. \right) ds \\
 &= \frac{1}{\Gamma(q+r)} \\
 &\quad \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s) ds. \left( \int_0^t (t-s)^{r-1} f(s) ds \right) \\
 I^q(I^r f(t)) &= I^{q+r} f(t) \quad \bullet
 \end{aligned}$$

### ***Sifat 2***

Untuk  $q > 0, t > 0$ ,

$$D^q(I^q f(t)) = f(t) \quad (4.2)$$

*Bukti.*

Dengan menggunakan definisi dari turunan fraksional Riemann-Liouville maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 D^q f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t (t-s)^{n-q-1} ds \\
 &= \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-q} f(t))
 \end{aligned}$$

$$D^q(I^q f(t)) = \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-q} I^q f(t))$$

Dengan menggunakan sifat pertama didapat

$$D^q(I^q f(t)) = \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-q+q} f(t))$$

$$D^q(I^q f(t)) = \frac{d^n}{dt^n} (I^n f(t))$$

$$D^q(I^q f(t)) = f(t) \quad \bullet$$

### Sifat 3

Jika turunan fraksional sebuah fungsi yang memiliki order  $q$  dapat diintegrasikan maka

$$I^q(D^q f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^n [D^{q-j} f(t)] \frac{t^{q-j}}{\Gamma(q-j+1)} \quad (4.3)$$

$$n-1 < q \leq n$$

*Bukti.*

Menggunakan Lemma 2.1 didapat:

$$(I^q D^q f)(t) = f(t) - \sum_{j=1}^n \frac{y^{(n-j)}(a)(t-a)^{q-j}}{\Gamma(q-j+1)}$$

$$, y^{(n-j)}(t) = (I^{n-q} f)(t)$$

$$D^{q-j} f(t) = \frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}} (I^{(n-j)-(q-j)} f)(t) = y^{(n-j)}(t)$$

Sehingga diperoleh:

$$I^q(D^q f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^n [D^{q-j} f(t)] \frac{t^{q-j}}{\Gamma(q-j+1)}$$

jika  $m < 0$ ,  $D^m f(t)$  didefinisikan sebagai

$$D^m f(t) = I^{-m} f(t)$$

Dengan  $D^m f(t)$  adalah definisi turunan fraksional, maka diperoleh:

$$D^m f(t) = \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-m} f(t)) \quad , n - 1 < m \leq n$$

Jika  $m < 0$  maka  $n < 0$  sehingga:

$$D^m f(t) = I^{-m} f(t) \quad \bullet$$

#### ***Sifat 4***

Turunan fraksional Riemann-Liouville dengan konstanta  $c$  diberikan oleh

$$D^q(c) = \frac{ct^{-q}}{\Gamma(1-q)} \quad (4.4)$$

*Bukti.*

Menggunakan Definisi 2.2 dan mensubstitusi  $f(t) = (c)^1$  diperoleh

$$D^q(c) = \frac{d^n}{dt^n} \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t (t-s)^{n-q-1} c \, ds, \\ n - 1 < q \leq n$$

Untuk  $n=1$  diperoleh

$$D^q(c) = \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_0^t (t-s)^{1-q-1} c \, ds,$$



$$D^q(c) = \frac{c}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-q} ds,$$

$$D^q(c) = \frac{c}{\Gamma(1-q)} [(t-s)^{-q}]_{s=0}^t$$

$$D^q(c) = \frac{ct^{-q}}{\Gamma(1-q)} \quad \bullet$$

Salah satu keuntungan penting dalam menggunakan turunan fraksional tipe Caputo bahwa turunan Caputo dengan konstanta bernilai nol.

Menggunakan Definisi 2.5 dan mensubstitusi  $f(t) = (c)^1$  diperoleh

$$\begin{aligned} D^q(c) &= \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_0^t (t-s)^q c' ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_0^t (t-s)^q 0 ds \end{aligned}$$

$$D^q(c) = 0 \quad (4.5)$$

#### 4.2 Keseimbangan Persamaan Differensial Fraksional dengan Persamaan Integral Volterra

Nilai awal dari persamaan diferensial fraksional tipe Caputo diberikan oleh[1]:

$$\begin{aligned} D^q x(t) &= f(t, x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$f \in C([0, T], R), 0 < q < 1$$

Sedangkan integral volterra jenis kedua didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds, \\ 0 \leq t \leq T \quad T > 0, T \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa solusi pada persamaan diferensial fraksional tipe Caputo merupakan solusi dari integral volterra jika dan hanya jika solusi dari integral volterra merupakan solusi dari persamaan diferensial fraksional tipe Caputo. Hal ini tertuang pada teorema berikut:

**Teorema 4.1**

Solusi persamaan (4.6) merupakan solusi dari persamaan (4.7) dan begitu pula sebaliknya.

*Bukti ( $\Rightarrow$ )*

Menggunakan sifat 3, yakni:

$$I^q(D^q x(t)) = x(t) - \sum_{j=1}^n [D^{q-j} f(t)] \frac{t^{q-j}}{\Gamma(q-j+1)}$$

$$x(t) = I^q(D^q x(t)) + \sum_{j=1}^n [D^{q-j} f(t)] \frac{t^{q-j}}{\Gamma(q-j+1)}$$

dengan :

$$I^q(D^q x(t)) = I^q(f(t, x(t)))$$

$$I^q(D^q x(t)) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds.$$

$[D^{q-j} f(t)] = b_j$  maka

$$x(t) = \sum_{j=1}^n b_j \frac{t^{q-j}}{\Gamma(q-j+1)} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds.$$

Untuk  $x_0 = \sum_{j=1}^n b_j \frac{t^{q-j}}{\Gamma(q-j+1)}$  diperoleh

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds,$$

Terbukti bahwa solusi dari persamaan diferensial tipe Caputo merupakan solusi dari integral volterra.

*Bukti ( $\Leftarrow$ )*

Dari pembuktian sebelumnya didapatkan

$$x(t) = \sum_{j=1}^n b_j \frac{t^{q-j}}{\Gamma(q-j+1)} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds.$$

Kalikan kedua sisi dengan  $D^q$  maka persamaan menjadi

$$D^q x(t) = \sum_{j=1}^n b_j \frac{D^q t^{q-j}}{\Gamma(q-j+1)} + \frac{D^q}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds.$$

Karena  $D^q t^{q-j} = 0$  untuk  $j = 1, 2, \dots, n$  maka

$$D^q x(t) = \sum_{j=1}^n b_j \frac{0}{\Gamma(q-j+1)} + \frac{D^q}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds.$$

$$D^q x(t) = 0 + \frac{D^q}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds.$$

$$D^q x(t) = D^q I^q (f(t, x(t)))$$

Dengan Lemma 2.1 diperoleh

$$D^q x(t) = f(t, x(t))$$

Terbukti bahwa solusi dari integral volterra merupakan solusi dari persamaan diferensial fraksional tipe Caputo.

### 4.3 Beberapa Contoh Penyelesaian Eksak Persamaan Diferensial Fraksional Linier

Pada sub bab ini akan dibahas dua contoh persamaan diferensial fraksional linier beserta solusi eksaknya.

#### Contoh 4.1

Terdapat persamaan diferensial fraksional dari suatu fungsi  $t$  dengan order  $\frac{1}{2}$  yang didefinisikan dengan:

$$D^{\frac{1}{2}} x(t) = t \tag{4.8}$$

Akan didapatkan solusi dari fungsi  $t$  atau  $x(t)$  dengan menggunakan solusi integral volterra.

Dengan menggunakan solusi dari integral volterra maka solusi untuk persamaan (4.8) adalah

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{s}{(t-s)^{1/2}} ds \quad (4.9)$$

Menggunakan integral parsial, dimisalkan:

$$\begin{aligned} u &= s \\ du &= ds \\ v &= \int \frac{1}{(t-s)^{1/2}} ds \\ v &= -2\sqrt{t-s} \end{aligned}$$

maka didapat persamaan baru, yakni:

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left[ -2s\sqrt{t-s} - \int -2\sqrt{t-s} ds \right]_0^t$$

Mencari nilai  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ .

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$  didefinisikan sebagai fungsi Gamma dengan:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p t^{-1/2} e^{-t} dt \end{aligned}$$

Dengan menggunakan integral substitusi, misalkan

$$\begin{aligned} t &= u^2 \\ dt &= 2u du \\ t^{-1/2} &= (u^2)^{-1/2} \\ t^{-1/2} &= u^{-1} \end{aligned}$$

Persamaan integral menjadi:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p u^{-1} e^{-u^2} 2u du \\ &= 2 \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p e^{-u^2} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p e^{-v^2} dv \\
\left[ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 &= \left( 2 \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p e^{-u^2} du \right) \left( 2 \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p e^{-v^2} dv \right) \\
\left[ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 &= 4 \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p \int_0^p e^{-(u^2+v^2)} du dv
\end{aligned}$$

Transformasi kedalam koordinat kutub

Ambil:

$$\begin{aligned}
u &= r \cos \theta \\
v &= r \sin \theta \\
u^2 + v^2 &= r^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 &= 4 \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^p e^{-(r^2)} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right| dr d\theta \\
&= 4 \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^p e^{-(r^2)} \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} dr d\theta \\
&= 4 \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^p e^{-(r^2)} (r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta) dr d\theta \\
&= 4 \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^p e^{-(r^2)} r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) dr d\theta \\
&= \lim_{p \rightarrow \infty} 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^p e^{-(r^2)} r dr d\theta
\end{aligned}$$

Menggunakan integral substitusi kembali, misalkan:

$$\begin{aligned}
A &= r^2 \\
dA &= 2r dr
\end{aligned}$$

Persamaan baru diperoleh:

$$\left[ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = 4 \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^p e^{-A} 1/2 dA d\theta$$



$$\begin{aligned}
&= 2 \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^p e^{-A} dA d\theta \\
&= 2 \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} [-e^{-A}]_0^p d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} \left( \lim_{p \rightarrow \infty} -e^{-p} + e^{-0} \right) d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} (0 + 1) d\theta \\
&= 2 [\theta]_0^{\pi/2} \\
&= 2 \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right)
\end{aligned}$$

$$\left[ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = \pi$$

$$\text{Maka didapat } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (4.10)$$

Oleh karena itu, persamaan (4.9) menjadi:

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ -2s\sqrt{t-s} - \int -2\sqrt{t-s} ds \right]_0^t$$

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ -2s\sqrt{t-s} + \left( -\frac{4}{3}(t-s)^{3/2} \right) \right]_0^t$$

$$\begin{aligned}
x(t) = x_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} &\left[ -2t\sqrt{t-t} + \left( -\frac{4}{3}(t-t)^{3/2} \right) - 2.0\sqrt{t-0} \right. \\
&\left. - \left( -\frac{4}{3}(t-0)^{3/2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ 0 + 0 - 0 - \left( -\frac{4}{3}t^{3/2} \right) \right]$$

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{4}{3}t^{3/2} \right)$$

$$x(t) = x_0 + \frac{4t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \quad (4.11)$$

Sehingga penyelesaian eksak dari  $D^{\frac{1}{2}}x(t) = t$  adalah

$$x(t) = x_0 + \frac{4t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}$$

*Contoh 4.2*

Terdapat persamaan diferensial fraksional dari suatu fungsi  $t$  dengan order  $\frac{1}{2}$  yang didefinisikan dengan:

$$D^{\frac{1}{2}}x(t) = t + x(t), \quad x_0 = 0 \quad (4.12)$$

Akan didapatkan solusi dari fungsi  $t$  atau  $x(t)$  dengan menggunakan solusi integral volterra.

Menggunakan solusi dari integral volterra maka didapat:

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{s+x(s)}{(t-s)^{1/2}} ds \quad (4.13)$$

Karena sesuai persamaan (4.10) yaitu  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  dan  $x_0 = 0$ , diperoleh:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{s+x(s)}{(t-s)^{1/2}} ds \\ x(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{s}{(t-s)^{1/2}} ds + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x(s)}{(t-s)^{1/2}} ds \end{aligned}$$

Dengan menggunakan penyelesaian dari contoh 4.1 didapat

$$x(t) = \frac{4t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x(s)}{(t-s)^{1/2}} ds \quad (4.14)$$

Untuk mendapatkan solusi dari persamaan tersebut, digunakan transformasi Laplace:

$$\begin{aligned} X(s) &= \mathcal{L} \left[ \frac{4t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x(s)}{(t-s)^{1/2}} ds \right] \\ X(s) &= \mathcal{L} \left( \frac{4t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}} \right) + \mathcal{L} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x(s)}{(t-s)^{1/2}} ds \right) \\ X(s) &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \mathcal{L} \left( t^{\frac{3}{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathcal{L} \left( \int_0^t \frac{x(s)}{(t-s)^{1/2}} ds \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dengan menggunakan transformasi Laplace yang terdapat pada tabel 2.1 dan teorema konvolusi didapat

$$X(s) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\frac{3}{2}!}{s^{\frac{3}{2}+1}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathcal{L}\left(x(t) \cdot t^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (4.16)$$

Karena  $\frac{3}{2}! = \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right)$ , maka

$$X(s) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right)}{s^{\frac{3}{2}+1}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{X(s)}{s} \cdot \Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right)$$

$$X(s) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}+1}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{X(s)}{s} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$X(s) = \frac{1}{s^{5/2}} + \frac{X(s)}{s}$$

$$X(s) - \frac{X(s)}{s} = \frac{1}{s^{5/2}}$$

$$X(s) \left(1 - \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^{5/2}}$$

$$X(s) = \frac{\frac{1}{s^{5/2}}}{\left(1 - \frac{1}{s}\right)}$$

$$X(s) = \frac{1}{s^{5/2}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{s}\right)}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{\frac{5}{2}}\left(1 - \frac{1}{s}\right)}\right)$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{\frac{5}{2}} - s^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}(s - 1)}\right)$$

Misalkan:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{t^{1/2}}{1/2!}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{t^{1/2}}{\sqrt{\pi}}$$

Sedangkan:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) = e^t$$

Menggunakan Teorema 2.1 untuk invers transformasi Laplace, didapatkan:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}(s-1)}\right) = \int_0^t \frac{(t-u)^{1/2}}{\sqrt{\pi}} e^u du$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-u)^{1/2} e^u du$$

Menggunakan integral parsial, misal:

$$x = (t-u)^{1/2}$$

$$dx = 1/2(t-u)^{-1/2} du$$

$$v = \int e^u du$$

$$v = e^u$$

Sehingga persamaan integral diperoleh:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ (t-u)^{1/2} e^u - \int e^u 1/2(t-u)^{-1/2} du \right]_0^t$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ (t-u)^{1/2} e^u - 1/2 \int e^u (t-u)^{-1/2} du \right]_0^t$$

Kembali menggunakan integral parsial, misal:

$$x = e^u$$

$$dx = e^u du$$

$$v = \int (t-u)^{-1/2} du$$

$$v = -2(t-u)^{1/2}$$

Sehingga persamaan menjadi:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ (t-u)^{1/2} e^u - 1/2 \left[ -e^u 2(t-u)^{1/2} + \int 2(t-u)^{1/2} e^u du \right]_0^t \right]$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ (t-u)^{1/2} e^u + (t-u)^{1/2} e^u \right]_0^t - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-u)^{1/2} e^u du$$

Karena

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t-u)^{1/2} e^u du$$

maka

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ (t-u)^{1/2} e^u + (t-u)^{1/2} e^u \right]_0^t - x(t)$$

$$2x(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ 2(t-u)^{1/2} e^u \right]_0^t$$

$$2x(t) = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$$

$$x(t) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \quad (4.17)$$

Sehingga penyelesaian eksak dari  $D^{\frac{1}{2}}x(t) = t + x(t)$ ,  $x_0 = 0$  adalah

$$x(t) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$$

Persamaan diferensial fraksional linier dapat diselesaikan secara eksak dengan menggunakan penyelesaian dari integral volterra. Namun, jika persamaan diferensial fraksional tersebut merupakan persamaan nonlinier, maka tidak dapat diselesaikan secara eksak dengan menggunakan integral volterra. Namun, hanya bisa diselesaikan secara numerik dan akan memiliki hasil aproksimasi. Karena derajat nonlinier yang tinggi maka tidak

dapat diselesaikan menggunakan transformasi Laplace ataupun teorema konvolusi sehingga hanya bisa didekati menggunakan solusi numerik.

#### 4.4 Penyelesaian Numerik Dari Proses Pendinginan Semi-Infinite Oleh Radiasi

Persamaan dari proses pendinginan semi-infinite oleh radiasi didefinisikan sebagai persamaan diferensial fraksional nonlinier:

$$D^{\frac{1}{2}}T(t) - \lambda(u_0 - T(t))^4 = 0, \quad t > 0 \quad (4.18)$$

Dengan  $T(t) = u_0 - u(0, t)$  dan  $T(0) = 0$ .

Pada sub bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa persamaan diferensial fraksional nonlinier tidak dapat diselesaikan secara eksak, melainkan secara numerik. Oleh karena itu, pada sub bab ini akan dibahas penyelesaian persamaan diferensial fraksional tersebut menggunakan perluasan dari deret Taylor.

Menggunakan Definisi 2.7 serta definisi fraksional deret Taylor yaitu,

$$T(t) = \sum_{i=0}^n \frac{(t-a)^{iq}}{\Gamma(iq+1)} (D^{iq}T)(a), 0 < q < 1 \quad (4.19)$$

Untuk menghasilkan solusi numerik, maka persamaan (4.19) harus diubah ke dalam bentuk matriks. Oleh karena itu, didefinisikan:

$$t_i = \frac{i}{N}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4.20)$$

$$[x_N(t)] = XM_0A \quad (4.21)$$



Dengan

$$X = [1(t-c)^\alpha (t-c)^{2\alpha} \dots (t-c)^{N\alpha}] \quad (4.22)$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Gamma(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Gamma(q+1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Gamma(2q+1)} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\Gamma(Nq+1)} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$A = \begin{bmatrix} (D^{0q}x)(c) \\ (D^{1q}x)(c) \\ (D^{2q}x)(c) \\ \vdots \\ (D^{Nq}x)(c) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Jika kedua sisi dikalikan dengan  $D^q$  maka didapat

$$D^q x_N(t) = D^q X M_0 A$$

$$D^q X = D^q [1(t-c)^q (t-c)^{2q} \dots (t-c)^{Nq}]$$

$$= [D^q 1 D^q (t-c)^q D^q (t-c)^{2q} \dots D^q (t-c)^{Nq}]$$

$$D^q X = \begin{bmatrix} 0 \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(1)} \frac{\Gamma(2q+1)}{\Gamma(q+1)} (t-c)^q \dots \\ \dots \frac{\Gamma(Nq+1)}{\Gamma((N-1)q+1)} (t-c)^{(N-1)q} \end{bmatrix} = X M_1 \quad (4.25)$$

Dengan

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Gamma(2q+1)}{\Gamma(q+1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\Gamma(Nq+1)}{\Gamma((N-1)q+1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Sehingga, matrik untuk turunan fraksional menjadi

$$D^q[x_N(t)] = XM_1M_0A \quad (4.27)$$

Dengan kondisi awal

$$U_0 = X(0)M_0A = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] = [0] \quad (4.28)$$

Untuk  $\lambda = 1, u_0 = 0$  maka persamaan diferensial dapat diubah menjadi:

$$(XM_1M_0 - (XM_0)^4)A = [0]$$

$$(XM_1M_0 - (XM_0)^4)A = F \quad (4.29)$$

Dengan

$$X = \begin{bmatrix} 1 & (t_0 - c)^q & (t_0 - c)^{2q} & \dots & (t_0 - c)^{Nq} \\ 1 & (t_1 - c)^q & (t_1 - c)^{2q} & \dots & (t_1 - c)^{Nq} \\ 1 & (t_2 - c)^q & (t_2 - c)^{2q} & \dots & (t_2 - c)^{Nq} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (t_N - c)^q & (t_N - c)^{2q} & \dots & (t_N - c)^{Nq} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Misal  $WA = F$  atau  $[W; F], W = [W_{ij}], ij = 1, 2, \dots, N$

Untuk  $W = (XM_1M_0 - (XM_0)^4)$  dengan kondisi awal

$U_0 = X(0)M_0A = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] = [0]$ , maka didapat matriks

$$[W; F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0; & 0 \\ w_{10} & w_{11} & \dots & w_{1N}; & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_{N-10} & w_{N-11} & \dots & w_{N-1N}; & 0 \\ w_{N0} & w_{N1} & \dots & w_{NN}; & 0 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Pada Tugas Akhir ini diambil contoh untuk  $c=0$  dan  $N=5$  maka solusi aproksimasi yang diperoleh adalah

$$T_5(t) = \sum_{i=0}^5 \frac{(t)^{iq}}{\Gamma(iq+1)} (D^{iq} f) \quad (4.33)$$

Dengan  $t_i = \frac{i}{N}$  maka diperoleh

$$t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{5}, t_2 = \frac{2}{5}, t_3 = \frac{3}{5}, t_4 = \frac{4}{5}, t_5 = 1$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & (t_0)^{1/2} & (t_0)^1 & (t_0)^{3/2} & (t_0)^2 & (t_0)^{5/2} \\ 1 & (t_1)^{1/2} & (t_1)^1 & (t_1)^{3/2} & (t_1)^2 & (t_1)^{5/2} \\ 1 & (t_2)^{1/2} & (t_2)^1 & (t_2)^{3/2} & (t_2)^2 & (t_2)^{5/2} \\ 1 & (t_3)^{1/2} & (t_3)^1 & (t_3)^{3/2} & (t_3)^2 & (t_3)^{5/2} \\ 1 & (t_4)^{1/2} & (t_4)^1 & (t_4)^{3/2} & (t_4)^2 & (t_4)^{5/2} \\ 1 & (t_5)^{1/2} & (t_5)^1 & (t_5)^{3/2} & (t_5)^2 & (t_5)^{5/2} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & (0)^{1/2} & (0)^1 & (0)^{3/2} & (0)^2 & (0)^{5/2} \\ 1 & (1/5)^{1/2} & (1/5)^1 & (1/5)^{3/2} & (1/5)^2 & (1/5)^{5/2} \\ 1 & (2/5)^{1/2} & (2/5)^1 & (2/5)^{3/2} & (2/5)^2 & (2/5)^{5/2} \\ 1 & (3/5)^{1/2} & (3/5)^1 & (3/5)^{3/2} & (3/5)^2 & (3/5)^{5/2} \\ 1 & (4/5)^{1/2} & (4/5)^1 & (4/5)^{3/2} & (4/5)^2 & (4/5)^{5/2} \\ 1 & (1)^{1/2} & (1)^1 & (1)^{3/2} & (1)^2 & (1)^{5/2} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{1/5} & 1/5 & (1/5)^{3/2} & 1/25 & (1/5)^{5/2} \\ 1 & \sqrt{2/5} & 2/5 & (2/5)^{3/2} & 4/25 & (2/5)^{5/2} \\ 1 & \sqrt{3/5} & 3/5 & (3/5)^{3/2} & 9/25 & (3/5)^{5/2} \\ 1 & \sqrt{4/5} & 4/5 & (4/5)^{3/2} & 16/25 & (4/5)^{5/2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Gamma(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Gamma(1/2 + 1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Gamma(1 + 1)} & \frac{1}{\Gamma(3/2 + 1)} & \frac{1}{\Gamma(2 + 1)} & \frac{1}{\Gamma(5/2 + 1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3\sqrt{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8/15\sqrt{\pi} \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\pi}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\sqrt{\pi}/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/\sqrt{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15\sqrt{\pi}/16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mencari nilai  $XM_1M_0$

$$XM_1M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (1/5)^{\frac{1}{2}} & 1/5 & (1/5)^{\frac{3}{2}} & 1/25 & (1/5)^{\frac{5}{2}} \\ 1 & (2/5)^{\frac{1}{2}} & 2/5 & (2/5)^{\frac{3}{2}} & 4/25 & (2/5)^{\frac{5}{2}} \\ 1 & (3/5)^{\frac{1}{2}} & 3/5 & (3/5)^{\frac{3}{2}} & 9/25 & (3/5)^{\frac{5}{2}} \\ 1 & (4/5)^{\frac{1}{2}} & 4/5 & (4/5)^{\frac{3}{2}} & 16/25 & (4/5)^{\frac{5}{2}} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\pi}/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\sqrt{\pi}/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/\sqrt{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15\sqrt{\pi}/16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{\pi}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3\sqrt{\pi}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{8}{15\sqrt{\pi}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15\sqrt{\pi} \end{bmatrix}$$

=

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.8860 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8860 & 0.5048 & 0.2658 & 0.0060 & 0.0665 \\ 0 & 0.8860 & 0.7138 & 0.5316 & 0.0482 & 0.2658 \\ 0 & 0.8860 & 0.8743 & 0.7974 & 0.1625 & 0.5981 \\ 0 & 0.8860 & 1.0095 & 1.0632 & 0.3853 & 1.0632 \\ 0 & 0.8860 & 1.1287 & 1.3290 & 1.5049 & 1.6613 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{\pi}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3\sqrt{\pi}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{15\sqrt{\pi}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \end{bmatrix}$$

$$XM_1M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0.5048 & 0.2000 & 0.0030 & 0.0200 \\ 0 & 1.0000 & 0.7138 & 0.4000 & 0.0241 & 0.0800 \\ 0 & 1.0000 & 0.8743 & 0.6000 & 0.0813 & 0.1800 \\ 0 & 1.0000 & 1.0095 & 0.8000 & 0.1926 & 0.3200 \\ 0 & 1.0000 & 1.1287 & 1.0000 & 0.7524 & 0.5000 \end{bmatrix}$$

Mencari nilai  $(XM_0)^4$ 

$$XM_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (1/5)^{\frac{1}{2}} & 1/5 & (1/5)^{\frac{3}{2}} & 1/25 & (1/5)^{\frac{5}{2}} \\ 1 & (2/5)^{\frac{1}{2}} & 2/5 & (2/5)^{\frac{3}{2}} & 4/25 & (2/5)^{\frac{5}{2}} \\ 1 & (3/5)^{\frac{1}{2}} & 3/5 & (3/5)^{\frac{3}{2}} & 9/25 & (3/5)^{\frac{5}{2}} \\ 1 & (4/5)^{\frac{1}{2}} & 4/5 & (4/5)^{\frac{3}{2}} & 16/25 & (4/5)^{\frac{5}{2}} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3\sqrt{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8/15\sqrt{\pi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 XM_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2/\sqrt{5\pi} & 1/5 & 4/15\sqrt{5\pi} & 1/50 & 8/375\sqrt{5\pi} \\ 1 & 2\sqrt{2}/\sqrt{5\pi} & 2/5 & 8\sqrt{2}/15\sqrt{5\pi} & 4/50 & 32\sqrt{2}/375\sqrt{5\pi} \\ 1 & 2\sqrt{3}/\sqrt{5\pi} & 3/5 & 12\sqrt{3}/15\sqrt{5\pi} & 9/50 & 72\sqrt{3}/375\sqrt{5\pi} \\ 1 & 4/\sqrt{5\pi} & 4/5 & 32/15\sqrt{5\pi} & 16/50 & 256/375\sqrt{5\pi} \\ 1 & 2/\sqrt{\pi} & 1 & 4/3\sqrt{\pi} & 1/2 & 8/15\sqrt{\pi} \end{bmatrix} \\
 (XM_0)^4 &= \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.0421 & 0.3952 & 0.1998 & 0.0162 & 0.0396 & 0.0031 \\ 4.7316 & 0.7765 & 0.3963 & 0.0342 & 0.0805 & 0.0068 \\ 6.8193 & 1.2913 & 0.6652 & 0.0607 & 0.1380 & 0.0125 \\ 9.6409 & 2.0415 & 1.0617 & 0.1025 & 0.2252 & 0.0219 \\ 17.0098 & 4.2138 & 2.2298 & 0.2374 & 0.4919 & 0.0537 \end{bmatrix} \setminus \\
 &\quad (XM_1M_0 - (XM_0)^4)A = F
 \end{aligned}$$

Didapat

$$\begin{bmatrix} -1.0000 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.0421 & 0.6048 & 0.3050 & 0.1838 & -0.0366 & 0.0169 \\ -4.7316 & 0.2235 & 0.3175 & 0.3658 & -0.0564 & 0.0732 \\ -6.8193 & -0.2913 & 0.2091 & 0.5393 & -0.0568 & 0.1675 \\ -9.6409 & -1.0415 & -0.0522 & 0.6975 & -0.0326 & 0.2981 \\ -17.0098 & -3.2138 & -1.1011 & 0.7626 & 0.2606 & 0.4463 \end{bmatrix} A = [0]$$

Karena terdapat syarat awal

$$U_0 = X(0)M_0A = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] = [0]$$

Maka matriks menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.0421 & 0.6048 & 0.3050 & 0.1838 & -0.0366 & 0.0169 \\ -4.7316 & 0.2235 & 0.3175 & 0.3658 & -0.0564 & 0.0732 \\ -6.8193 & -0.2913 & 0.2091 & 0.5393 & -0.0568 & 0.1675 \\ -9.6409 & -1.0415 & -0.0522 & 0.6975 & -0.0326 & 0.2981 \\ -17.0098 & -3.2138 & -1.1011 & 0.7626 & 0.2606 & 0.4463 \end{bmatrix}$$

$$A=[0]$$

$$A=[0 \ 1 \ -0.3179 \ 0.2637 \ 0.0690 \ 0.1483] \quad (4.34)$$

Substitusi persamaan (4.34) ke persamaan (4.33), Sehingga diperoleh solusi dari persamaan (4.33), yaitu:

$$T(t) = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} - -0.3179t + \frac{0.3516t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} + 0.0345t^2 + 0.079093t^{\frac{5}{2}}$$

Untuk mendapatkan penyelesaian numerik, maka t didekati dari 0,1 sampai 1.

Misal untuk t=0.1 diperoleh

$$T(0.1) = \frac{2\sqrt{0.1}}{\sqrt{\pi}} - -0.3179(0.1) + \frac{0.3516(0.1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} + 0.0345(0.1)^2 + 0.079093(0.1)^{\frac{5}{2}}$$

$$T(0.1) = 0.3258$$

Untuk t=0.2

$$T(0.2) = \frac{2\sqrt{0.2}}{\sqrt{\pi}} - 0.3179(0.2) + \frac{0.3516(0.2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} + 0.0345(0.2)^2 + 0.079093(0.2)^{\frac{5}{2}}$$

$$T(0.2) = 0.4451$$

Sampai dengan t=1, diperoleh:



$$T(1) = \frac{2\sqrt{1}}{\sqrt{\pi}} - 0.3179(1) + \frac{0.3516(1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} + 0.0345(1)^2 + 0.079093(1)^{\frac{5}{2}}$$

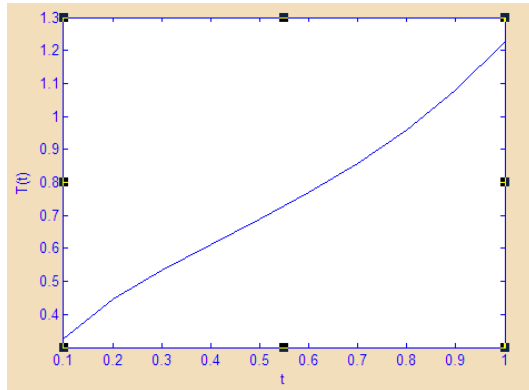
$$T(1) = 1.2269$$

**Tabel 4.1** Hasil numerik untuk N=5

t	T(t)
0.1	0.3258
0.2	0.4451
0.3	0.5345
0.4	0.6128
0.5	0.6889
0.6	0.7687
0.7	0.8573
0.8	0.9597
0.9	1.0811
1	1.2269

Dapat dilihat dari Tabel 4.1 bahwa semakin besar waktu maka hasil fungsi juga akan semakin besar.

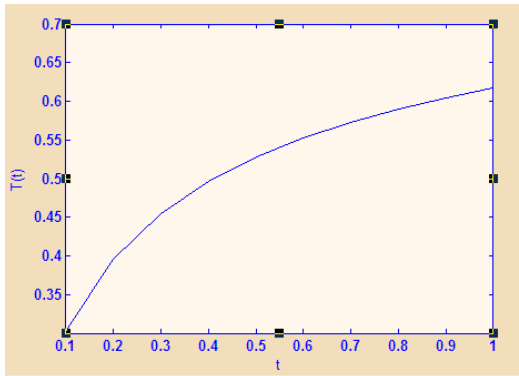
Proses pendinginan semi-infinite oleh radiasi merupakan masalah nilai batas satu dimensi untuk persamaan diferensial fraksional serta merupakan persamaan diferensial fraksional nonlinier yang dapat diketahui dengan bentuk persamaannya yang berderajat empat. Oleh karena itu model tersebut hanya dapat diselesaikan dengan pendekatan numerik yang mana pada penelitian ini diambil contoh N=3, N=4, N=5 dan N=7.



**Gambar 4.1** Grafik solusi numerik untuk  $N=5$

Berdasarkan Grafik 4.1, sumbu x menyatakan besaran dari  $t$  atau besaran dari waktu, sedangkan sumbu y menunjukkan besaran dari fungsi  $t$  atau  $T(t)$ . Pada saat  $N=5$  maka  $T(t)$  hanya bergerak dari  $N=1$  sampai  $N=5$ . Grafik 4.1 juga menunjukkan bahwa semakin besar  $t$ , maka fungsi  $T(t)$  juga semakin besar.

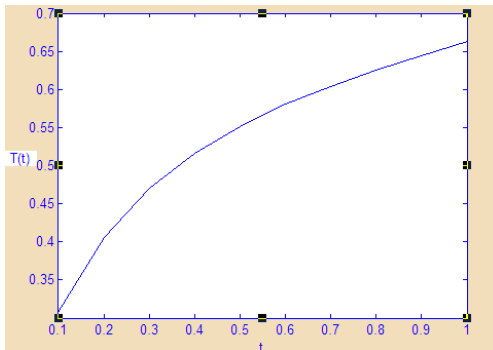
Fungsi  $T(t)$  merupakan pengurangan dari  $u_0$  dengan  $u(0, t)$  dimana  $u(0, t)$  adalah suhu permukaan dan  $u_0$  adalah nilai awal. Karena  $u_0 = 0$ , berakibat  $T(t) = -u(0, t)$  sehingga semakin besar nilai  $T(t)$ , maka suhu permukaan semakin turun.



**Gambar 4.2** Grafik solusi numerik untuk  $N=3$

Berdasarkan Grafik 4.2, sumbu x menyatakan besaran dari  $t$  atau besaran dari waktu, sedangkan sumbu y menunjukkan besaran dari fungsi  $t$  atau  $T(t)$ . Pada saat  $N=3$  maka  $T(t)$  hanya bergerak dari  $N=1$  sampai  $N=3$ . Grafik 4.2 juga menunjukkan bahwa semakin besar  $t$ , maka fungsi  $T(t)$  juga semakin besar.

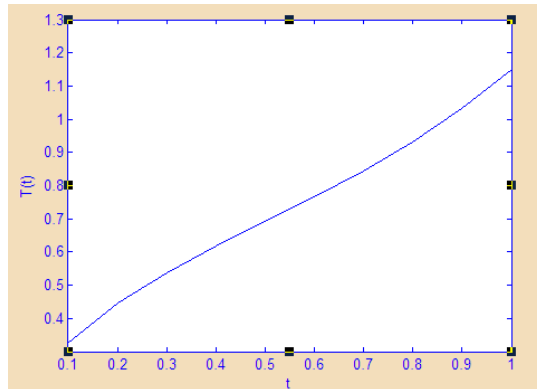
Fungsi  $T(t)$  merupakan pengurangan dari  $u_0$  dengan  $u(0, t)$  dimana  $u(0, t)$  adalah suhu permukaan dan  $u_0$  adalah nilai awal. Karena  $u_0 = 0$ , berakibat  $T(t) = -u(0, t)$  sehingga semakin besar nilai  $T(t)$ , maka suhu permukaan semakin turun.



**Gambar 4.3** Grafik solusi numerik untuk  $N=4$

Berdasarkan Grafik 4.3, sumbu x menyatakan besaran dari  $t$  atau besaran dari waktu, sedangkan sumbu y menunjukkan besaran dari fungsi  $t$  atau  $T(t)$ . Pada saat  $N=4$  maka  $T(t)$  hanya bergerak dari  $N=1$  sampai  $N=4$ . Grafik 4.3 juga menunjukkan bahwa semakin besar  $t$ , maka fungsi  $T(t)$  juga semakin besar.

Fungsi  $T(t)$  merupakan pengurangan dari  $u_0$  dengan  $u(0, t)$  dimana  $u(0, t)$  adalah suhu permukaan dan  $u_0$  adalah nilai awal. Karena  $u_0 = 0$ , berakibat  $T(t) = -u(0, t)$  sehingga semakin besar nilai  $T(t)$ , maka suhu permukaan semakin turun. Grafik 4.3 memiliki kemiripan dengan Grafik 4.2. sehingga penurunan suhu permukaan pada saat  $N=3$  dan  $N=4$  akan memiliki laju yang sama meskipun dengan besaran yang berbeda.



**Gambar 4.4** Grafik solusi numerik untuk  $N=7$

Berdasarkan Grafik 4.4, sumbu x menyatakan besaran dari  $t$  atau besaran dari waktu, sedangkan sumbu y menunjukkan besaran dari fungsi  $t$  atau  $T(t)$ . Pada saat  $N=7$  maka  $T(t)$  hanya bergerak dari  $N=1$  sampai  $N=7$ . Grafik 4.4 juga menunjukkan bahwa semakin besar  $t$ , maka fungsi  $T(t)$  juga semakin besar.

Fungsi  $T(t)$  merupakan pengurangan dari  $u_0$  dengan  $u(0, t)$  dimana  $u(0, t)$  adalah suhu permukaan dan  $u_0$  adalah nilai awal. Karena  $u_0 = 0$ , berakibat  $T(t) = -u(0, t)$  sehingga semakin besar nilai  $T(t)$ , maka suhu permukaan semakin turun.

Grafik 4.4 memiliki kemiripan dengan Grafik 4.1. sehingga penurunan suhu permukaan pada saat  $N=5$  dan  $N=7$  akan memiliki laju yang sama meskipun dengan besaran yang berbeda.

## BAB V

### KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini diberikan kesimpulan sebagai hasil dari analisa model yang telah diperoleh dan saran sebagai pertimbangan dalam pengembangan atau penelitian lebih lanjut.

#### 5.1 Kesimpulan

1. Setiap solusi dari persamaan diferensial fraksional merupakan solusi dari integral volterra begitu pula sebaliknya. Solusi dari persamaan diferensial fraksional linier dapat didaparkan dari solusi integral volterra. Namun, untuk persamaan diferensial fraksional nonlinier dapat diselesaikan dengan cara numerik menggunakan perluasan dari deret Taylor.

2. Pada persamaan diferensial fraksional linier:

$$D^{\frac{1}{2}}x(t) = t$$

solusi eksak yang diperoleh adalah  $x(t) = x_0 + \frac{4t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}$

Sedangkan untuk persamaan:

$$D^{\frac{1}{2}}x(t) = t + x(t), \quad x_0 = 0$$

solusi eksak yang diperoleh  $x(t) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$ .

Solusi tersebut diperoleh dari solusi integral volterra jenis kedua.

3. Model pada proses pendinginan semi-infinite yang mana merupakan masalah nilai batas satu dimensi untuk persamaan diferensial fraksional dapat diselesaikan dengan menggunakan metode fraksional deret Taylor dan menghasilkan solusi aproksimasi numerik serta grafik dengan nilai  $N=3$ ,  $N=4$ ,  $N=5$  dan  $N=7$ .

Fungsi  $T(t)$  merupakan pengurangan dari  $u_0$  dengan  $u(0, t)$  dimana  $u(0, t)$  adalah suhu permukaan dan  $u_0$  adalah nilai awal. Karena  $u_0 = 0$ , berakibat  $T(t) = -u(0, t)$  sehingga semakin besar nilai  $T(t)$ , maka suhu permukaan semakin turun.

## 5.2 Saran

Pada penelitian ini tidak dibahas metode-metode yang dapat dilakukan untuk mendapatkan solusi dari persamaan diferensial fraksional tersebut juga tidak dibahas membahas tentang proses pendinginan tubuh semi-infinite jika fungsi  $x$  atau  $X(x) \neq 0$ . Oleh karena itu, penulis menyarankan kepada pembaca yang tertarik dengan masalah ini agar pada penelitian berikutnya membahas tentang metode yang berbeda untuk menyelesaikan persamaan diferensial fraksional serta bagaimana solusi dari proses pendinginan tubuh semi-infinite jika  $X(x) \neq 0$ .

## LAMPIRAN

Listing program numerik untuk  $N=3$

- M-File dengan judul **menghitungmatriksN=3.m**

```
phi=3.14;  
X=[1 0 0 0 ;  
    1 sqrt(1/3) 1/3 (1/3)^3/2;  
    1 sqrt(2/3) 2/3 (2/3)^3/2;  
    1 1 1 1 ];  
M1=[0 sqrt(phi)/2 0 0;  
     0 0 2/sqrt(phi) 0;  
     0 0 0 3*sqrt(phi)/4;  
     0 0 0 0];  
M0=[1 0 0 0;  
     0 2/sqrt(phi) 0 0;  
     0 0 1 0;  
     0 0 0 4/(3*sqrt(phi))];  
Y=(X*M1*M0-(X*M0)^4);
```

- M-File dengan judul **menghitungAN=3.m**

```
N=[ -0.1804    0.1741;  
     -0.7383    0.3244;  
     -2.8020    0.0700];  
A=[0.3088;1.5880;5.0183];  
Y= A\N;
```

- M-File dengan judul **menghitungXN=3.m**

```
phi=3.14;  
for t=0.1:0.1:1  
    t  
    x=2*sqrt(t)/sqrt(phi)-  
    0.5500*t+0.0331*4*(t^3/2)/3*sqrt(phi)  
end;
```

- M-File dengan judul **plotN=3.m**

```
t=[0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1];
```



```

x=[0.3020 0.3951 0.4543 0.4963 0.5280
0.5527 0.5727 0.5895 0.6043 0.6178];
plot(t,x)

```

Listing program numerik untuk  $N=4$

- M-File dengan judul **menghitungmatriksN=4.m**

```

phi=3.14;
X=[1 0 0 0 0 ;
    1 sqrt(1/4) 1/4 (1/4)^3/2 1/16;
    1 sqrt(2/4) 2/4 (2/4)^3/2 4/16;
    1 sqrt(3/4) 3/4 (3/4)^3/2 9/16;
    1 1 1 1 1];
M1=[0 sqrt(phi)/2 0 0 0;
     0 0 2/sqrt(phi) 0 0;
     0 0 0 3*sqrt(phi)/4 0;
     0 0 0 0 8/(3*sqrt(phi));
     0 0 0 0 0];
M0=[1 0 0 0 0;
     0 2/sqrt(phi) 0 0 0;
     0 0 1 0 0;
     0 0 0 4/(3*sqrt(phi)) 0;
     0 0 0 0 1/2];
Y=(X*M1*M0-(X*M0)^4);

```

- M-File dengan judul **menghitungAN=4.m**

```

N=[ 0.0492 0.1414 -0.1337;
    -0.3201 0.2543 -0.2627;
    -0.9889 0.3064 -0.3935;
    -2.5310 0.1581 -0.2866];
A=[-0.1297;0.8682;2.2614;5.0348];
Y= A\N;

```

- M-File dengan judul **menghitungXN=4.m**

```

phi=3.14;
for t=0.1:0.1:1
    t

```

```

        x=2*sqrt(t)/sqrt(phi)-
0.4887*t+0.0542*4*(t^3/2)/3*sqrt(phi)+-
0.0814*(t^2)/2
end;

```

- M-File dengan judul **plotN=4.m**

```

t=[0.1:0.1:1];
x=[0.3077 0.4059 0.4697 0.5159 0.5516
0.5802 0.6042 0.6253 0.6446 0.6633];
plot(t,x);

```

Listing program numerik untuk N=5

- M-File dengan judul **menghitungmatriksN=5.m**

```

phi=3.14;
X=[1 0 0 0 0 0;
1 sqrt(1/5) 1/5 (1/5)^3/2 1/25
(1/5)^5/2;
1 sqrt(2/5) 2/5 (2/5)^3/2 4/25
(2/5)^5/2;
1 sqrt(3/5) 3/5 (3/5)^3/2 9/25
(3/5)^5/2;
1 sqrt(4/5) 4/5 (4/5)^3/2 16/25
(4/5)^5/2;
1 1 1 1 1 1];
M1=[0 sqrt(phi)/2 0 0 0 0;
0 0 2/sqrt(phi) 0 0 0;
0 0 0 3*sqrt(phi)/4 0 0;
0 0 0 0 8/(3*sqrt(phi)) 0;
0 0 0 0 0 15*sqrt(phi)/16;
0 0 0 0 0 0];
M0=[1 0 0 0 0 0;
0 2/sqrt(phi) 0 0 0 0;
0 0 1 0 0 0;
0 0 0 4/(3*sqrt(phi)) 0 0;
0 0 0 0 1/2 0;
0 0 0 0 0 8/(15*sqrt(phi))];

```

$$Y = (X * M1 * M0 - (X * M0)^4);$$

- M-File dengan judul **menghitungAN=5.m**

```
N=[ 0.3050 0.1838 -0.0366 0.0169;
    0.3175 0.3658 -0.0564
0.0732;
    0.2091 0.5393 -0.0568
0.1675;
    -0.0522 0.6975 -0.0326
0.2981;
    -1.1011 0.7626 0.2606
0.4463];
A=[-0.6048;-0.2235;0.2913;1.0415;3.2138];
Y= A\N;
```

- M-File dengan judul **menghitungXN=5.m**

```
phi=3.14;
for t=0.1:0.1:1
    t
    x=2*sqrt(t)/sqrt(phi)-
    0.3179*t+0.2637*4*(t^3/2)/3*sqrt(phi)+0.06
    90*(t^2)/2+0.1483*8*(t^5/2)/15*sqrt(phi)
end;
```

- M-File dengan judul **plotN=5.m**

```
t=[0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1];
x=[0.3258 0.4451 0.5345 0.6128 0.6889
0.7687 0.8573 0.9597 1.0811 1.2269];
plot(t,x);
```

Listing program numerik untuk N=7

- M-File dengan judul **menghitungmatriksN=7.m**

```
phi=3.14;
n=7;
X=[1 0 0 0 0 0 0 0;
```

```

1 sqrt(1/n) 1/n (1/n)^3/2 1/(n^2)
(1/n)^5/2 (1/n)^3 (1/n)^7/2;
1 sqrt(2/n) 2/n (2/n)^3/2 4/(n^2)
(2/n)^5/2 (2/n)^3 (2/n)^7/2;
1 sqrt(3/n) 3/n (3/n)^3/2 9/(n^2)
(3/n)^5/2 (3/n)^3 (3/n)^7/2;
1 sqrt(4/n) 4/n (4/n)^3/2 16/(n^2)
(4/n)^5/2 (4/n)^3 (4/n)^7/2;
1 sqrt(5/n) 5/n (5/n)^3/2 5^2/(n^2)
(5/n)^5/2 (5/n)^3 (5/n)^7/2;
1 sqrt(6/n) 6/n (6/n)^3/2 6^2/(n^2)
(6/n)^5/2 (6/n)^3 (6/n)^7/2
1 1 1 1 1 1 1 1];
M1=[0 sqrt(phi)/2 0 0 0 0 0 0;
0 0 2/sqrt(phi) 0 0 0 0 0;
0 0 0 3*sqrt(phi)/4 0 0 0 0;
0 0 0 0 8/(3*sqrt(phi)) 0 0 0;
0 0 0 0 0 15*sqrt(phi)/16 0 0;
0 0 0 0 0 0 48/(15*sqrt(phi)) 0;
0 0 0 0 0 0 0 35*sqrt(phi)/32;
0 0 0 0 0 0 0 0];
M0=[1 0 0 0 0 0 0 0;
0 2/sqrt(phi) 0 0 0 0 0 0;
0 0 1 0 0 0 0 0;
0 0 0 4/(3*sqrt(phi)) 0 0 0 0;
0 0 0 0 1/2 0 0 0;
0 0 0 0 0 8/(15*sqrt(phi)) 0 0;
0 0 0 0 0 0 1/6 0;
0 0 0 0 0 0 0 16/(105*sqrt(phi))];
Y=(X*M1*M0-(X*M0)^4);

```

- M-File dengan judul **menghitungAN=7.m**

```

N=[ 0.3676      0.1408      -0.0065      0.0100
-0.0009      0.0005;
      0.4949      0.2818      -0.0055
0.0404 -0.0014      0.0038;
      0.5697      0.4222      0.0068
0.0911 -0.0006      0.0130;

```

```

            0.6045      0.5616      0.0360
0.1620 0.0049      0.0309;
            0.5975      0.6995      0.0871
0.2532 0.0215      0.0604;
            0.5376      0.8351      0.1642
0.3644 0.0600      0.1045;
            0.1925      0.9559      0.6135
0.4937 0.2819      0.1656];
A=[-0.8557;-0.7367;-0.5920;-0.4047;-
0.1530; 0.1966;1.1792];
Z= A\N;

```

- M-File dengan judul **menghitungXN=7.m**

```

phi=3.14;
for t=0.1:0.1:1
    t
    x=2*sqrt(t)/sqrt(phi)-
0.3146*t+0.1169*4*(t^3/2)/3*sqrt(phi)+0.2262*
(t^2)/2+0.1411*8*(t^5/2)/15*sqrt(phi)+0.1052*
(t^3)/6+0.0565*(t^5/2)*6/(105*sqrt(phi))
end;

```

- M-File dengan judul **plotN=7.m**

```

t=[0.1:0.1:1];
x=[0.3267 0.4476 0.5384 0.6167 0.6906
0.7651 0.8442 0.9320 1.0326 1.1504];
plot(t,x);

```

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] E. Demirci, N. Ozalp (2012). "A method for solving differential equations of fractional order". **Computational and applied mathematics Vol. 236**, Hal. 2754-2762
- [2] Lakshmikantham, A.S. Vatsala (2007). "Theory of fractional differential inequalities and applications". **Communications in Applied Analysis Vol. 11**, Hal. 395–402.
- [3] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo (2006). "Theory and Applications of Fractional Differential Equations". **Elsevier Vol. 204**
- [4] Burner, H. (2010). "Theory and numerical solution of volterra function integral equations". **HIT Summer Seminar**
- [5] Kisela, T. (2008). **Fractional Differential Equations and Their Applications**. Thesis Faculty Of Mechanical Engineering, Institute Of Mathematics, BRNO University Of Technology
- [6] Santoso, Widiarti. (1998). **Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern edisi 2**. Jakarta: Erlangga
- [7] K. Diethelm (2010). "The analysis of fractional differential equations: an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type". **Lecture Notes in Mathematics**, Springer-Verlag
- [8] E.W. Adams, H. Spreuer (1967). "Theoretical Solution of The Nonlinear Problem of Transient Cooling of An Opaque Sphere In Space". **Nasa Technical Note D-4046**.
- [9] L. Adam. (2004). "Fractional Calculus: History, definitions, and Applications for Engineer". **University of Notre Dame**.

- [10] "Appendix: Function of One Variable" URL: <http://www.math.ucdavis.edu/> (diakses tanggal 1 Desember 2015)
- [11] Kurniawan, I.(2013). "Transformasi laplace". URL: <http://irwankurniawanblog.files.wordpress.com/> (diakses tanggal 1 Desember 2015)
- [12] Sinoem, I.(2011). "Deret Taylor dan Analisis Galat" URL: <http://simponi.mdp.ac.id/> (diakses tanggal 20 Nopember 2015)

## BIODATA PENULIS



Penulis dilahirkan di Lamongan pada tanggal 13 Juni 1994, merupakan anak kedua dari dua bersaudara. Penulis telah menempuh pendidikan formal dari TK ABA Kendal, MI Muhammadiyah 02 Kendal, SMP Negeri 1 Babat, hingga SMA Negeri 1 Babat.

Penulis kemudian melanjutkan pendidikan S1 di Jurusan Matematika melalui jalur SNMPTN Tulis pada tahun 2011 dan terdaftar dengan NRP 1211 100 068. Di Jurusan Matematika ini, penulis mengambil bidang minat Pemodelan dan Simulasi Sistem. Penulis juga aktif di dalam organisasi intra kampus yakni pada Lembaga Dakwah Jurusan Ibnu Muqhlah sebagai *staff* Kaderisasi pada periode 2012-2013 dan menjabat sebagai Bendahara Umum pada periode 2013-2014.

Untuk kritik, saran, dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini dapat dikirimkan melalui *e-mail* ke [dwiafifah68@gmail.com](mailto:dwiafifah68@gmail.com).